La preuve en mathématique

Maria Alessandra Mariotti
Département de Mathématiques - Université de Pise
e-mail mariotti @dm.unipi.it

Introduction

Comme de nombreuses autres activités humaines, les mathématiques ont plusieurs aspects et plusieurs esprits, des aspects et des esprits qui refusent d'être circonscrits et enfermés dans des schémas trop rigides ou, pire encore, dans un seul schéma. Mais il est vrai que chacun, en fonction de son propre comportement vis-à-vis des mathématiques (issu de sa propre expérience et du rapport personnel qu'il entretient avec celles-ci) tend à privilégier et à renforcer un aspect, une pratique... En conséquence, la complexité et la richesse de ce phénomène de l'expérience humaine risquent d'être compromis.

Cela fait maintenant quelques années que le problème de la démonstration est devenu un des thèmes de recherche dans le domaine de la didactique, et aussi, un des thèmes de notre réflexion personnelle ; si nous devions exprimer notre évolution personnelle, nous dirions que nous avons l'impression que nos idées sur la "démonstration" ont changé ces dernières années, et qu'elles s'avèrent surtout beaucoup plus incertaines et confuses... Et c'est précisément dans notre tentative de les rendre plus claires que nous avons noté combien il est difficile d'enfermer l'idée de démonstration dans un discours qui la décrirait.

Nous avons eu l'occasion de vérifier, toujours plus et toujours mieux, le caractère humain, vivant, et pour cela même fuyant de quelque chose qui n'a de sens qu'en référence à une théorie, mais qui est pratique dans son essence. Nous sommes profondément convaincus que la démonstration et l'aspect théorique des mathématiques, ne peuvent être évacués comme accessoires dans la formation mathématique. On ne peut enseigner et transmettre les mathématiques en laissant de côté les démonstrations. L'objectif de cette conférence est de soutenir cette affirmation qui, pour beaucoup (enseignants, mathématiciens et didacticiens) peut sembler trop forte et inacceptable, et montrer en même temps comment les réflexions sur la nature de la démonstration peuvent nous indiquer de possibles voies, quant à la résolution du problème didactique qui nous tient à cœur.

La faute à Euclide?

Les racines profondes de la démonstration se trouvent dans les éléments d'Euclide et dans la "manière d'exposer" toute particulière utilisée dans son célèbre traité Suivant le commentaire de Proclo, après une description de ce que l'on doit considérer comme "élément", se trouve l'affirmation suivante :

> « Il est maintenant difficile, comme dans toute science, de choisir tout autant que de ranger dans l'ordre dû les éléments desquels dérive tout le reste... »
>
> (Health, vol. I, pp. 115-116).

Le problème semble donc être comment "ranger les connaissances dans l'ordre dû". L'exposition proposée par Euclide paraît avoir eu à cœur tout autant le contenu que le destinataire, ce dernier étant celui qui doit apprendre (l'élève) : les éléments sont en effet décrits comme des "moyens pour perfectionner la compréhension de l'élève en référence à toute la géométrie". Le mode d'exposition fait référence à un "style de rationalité" que certains historiens définissent justement comme "euclidien" (Vegetti, 1983). La nature du style vient du fait qu'il est possible de ramener la manière d'exposer les éléments à une sorte d'idée régulatrice de l'organisation de la science, capable de produire des images de la science qui la rendent reconnaissable et plausible à l'intérieur d'une communauté. (ibid.p.135). Que la manière euclidienne constitue un style, cela était connu des anciens : l'organisation en définitions, axiomes, démonstrations de théorèmes, était devenu le "sens commun" d'une science qui se voulait rigoureuse.

Les applications d'un tel style, dans des domaines différents des mathématiques, comme la médecine par exemple, Galeno prouvait la valeur de modèle expositif pertinent pour les sciences, ayant comme éléments caractéristiques :

- Primauté de la "forme invariante", c'est-à-dire , description du savoir en termes généraux
- Conception de la science en tant qu'assemblage développé dans une séquence déductive: à partir d'un ensemble défini de principes élémentaires capables de générer une séquence démonstrative.

Tout se fonde sur un double critère de vérité, celui de l'évidence qui concerne les principes, et celui de la cohérence déductive pour le parcours ultérieur.

Dans ce cadre, une profonde unité lie l'organisation et la compréhension, rendant l'organisation même fonctionnelle pour la compréhension des contenus, compréhension qui est liée de manière indissoluble à l'exigence d'acceptabilité et la reconnaissance à l'intérieur d'une communauté scientifique.

L'aspect qu'il faut souligner est précisément celui de la double finalité, de compréhension d'un côté et d'acceptabilité de l'autre. Ces aspects, nous semble-t-il, sont parmi ceux qui sont unanimement reconnus comme caractéristiques d'un corpus théorique, et se retrouvent dans de nombreuses discussions concernant la nature et la fonction de la démonstration. A titre d'exemple, citons Hanna :

> "Mathematicians accept a new theorem only when some combination of the following holds:
>
> They understand the theorem (that is, the concepts embodied in it, its logical antecedents, and its implications) and there is nothing to suggest it is not true;

The theorem is significant enough to have implication in one or more branches of mathematics, and thus to warrant detailed study and analysis;
The theorem is consistent with the body of accepted results;
The author has an unimpeachable reputation as an expert in the subject of the theorem;
There is a convincing mathematical argument for it, rigorous or otherwise, of a type they have encountered before.

(Hanna, 1989, p. 21-22)

Malgré le difficile changement de perspective, qui a conduit à la révision radicale de l'idée de vérité en mathématiques, le rapport entre compréhension et acceptabilité à l'égard des affirmations mathématiques ne semble pas avoir beaucoup changé au cours des siècles. Et il continue de constituer un élément caractéristique de cette discipline.
Le développement de rapports toujours plus complexes entre deux moments fondamentaux du développement des connaissances mathématiques : production d'une conjecture comme le cœur de la production de connaissances, et systématisation de telles connaissances, a conduit à une lente élaboration de l'idée de rigueur qui a culminé à la fin du XIXe siècle.
Tout cela nous conduit à souligner la profonde continuité entre construction de connaissances et leur systématisation en un corpus théorique, entre aspects typiques de la communication, comme celui d'être compréhensible, et aspects typiques de la connaissance en tant que produit culturel, comme l'acceptabilité.

Différentes approches au problème de la démonstration en didactique

Lorsque s'ouvre la discussion sur le thème de la démonstration, on se retrouve généralement face à deux comportements possibles, en opposition, et qui parfois semblent procéder en parallèle sans parvenir à communiquer ; comme le suggère Balacheff (1999), ceux-ci semblent faire référence à des perspectives culturelles différents : une perspective épistémologique, une perspective psychologique.
Dans un cas, le point de départ est l'analyse épistémologique, quand, dans l'autre cas, le point de départ est plutôt l'analyse des comportements des élèves, qui donne lieu à des classifications très fines des erreurs et des difficultés qu'on peut s'attendre dans la pratique scolaire.
Des exemples classiques de contribution du premier type sont les travaux de Duval (1992-93) et Balacheff (1987).
“Argumenter, démontrer, expliquer: continuité ou rupture ?” C'est le titre d'un article fondamental de R. Duval, qui tient une position "radicale", focalise l'attention sur un point crucial : la différence entre le plan sémantique, ou la valeur épistemique de l'énoncé est fondamental, et le plan théorique ou seulement la validité est en jeu, c'est-à-dire seulement la dépendance logique d'un énoncé par rapport aux axiomes de la théorie, indépendamment des valeurs de vérité que l'on attribue aux propositions en jeu .

En conséquence de cette analyse Duval souligne le problème de la distance cognitive entre la démonstration et l'argumentation, et aussi la pertinence de cette question pour la ‘Didactique de math’.
Un exemple de travail du deuxième type est donné par Harel & Sawder (1998), qui décrivent les différentes conduites des étudiantes face à la solution de problèmes dans le domaine de l'algèbre linéaire. La classification des différents arguments proposés dans la solution est très fine, mai les auteurs ne soulignent jamais la différence entre les schèmes d'argumentation en terme du modèle déductif propre aux mathématiques : tous les arguments son classés comme des "Proof schemes" (schéma de démonstration); le mot "proof" est utilisé soit pour indiquer des "véritables démonstration" soit des arguments quelconques.

Selon l’opinion de nombreux auteurs, le rapport entre le plan sémantique et le plan théorique se pose par rapport au problème de la compréhension ; il nous semble donc intéressant de soulever le problème particulier de comment se pose la forme hypothético-déductive par rapport à la compréhension, et donc à la fonction d’explication reconnue lors de la démonstration.
Il peut exister plusieurs possibilités. Si l’on choisit de souligner la rupture entre le plan sémantique, où il est possible de parler de la vérité (valeur épistémique) d’un énoncé donné, et le plan théorique où l’on ne peut parler que de validité, il faut également distinguer les points de vue différents en termes de compréhension. Au plan sémantique, la compréhension peut renvoyer à des liens entre les significations et pas nécessairement à des liens de conséquence logique. D’un autre côté, comment conjecturer et/ou démontrer le lien logique entre deux propositions sans faire référence aux significations.
Au niveau théorique, la valeur épistémique de chaque énoncé n’a aucun intérêt de même que la valeur épistémique attribuée par l’interlocuteur à l’énoncé dont on fait la démonstration, mais, toutefois, on ne peut pas penser à une pratique des théorèmes sans référence aux significations.
Ces deux points de vue ne sont pas nécessairement en opposition, mais ils focalisent simplement l’attention sur des aspects différents et tous importants de la démonstration. La fonction de validation théorique est la fonction d’explication, liée à l’interprétation et donc à la compréhension. D’un point de vue psychologique et épistémologique, mais aussi d’un point de vue didactique, il ne semble pas possible de pouvoir opérer cette distinction nette, qu’exigerait une vision purement formelle des mathématiques,

> "to expose, or to find, a proof people certainly argue, in various ways, discursive or pictorial, possibly resorting to rhetorical expedients, with all the resources of conversation, but with a special aim ... that of letting the interlocutor see a certain pattern, a series of links connecting chunks of knowledge".

(Lolli, 1999)

La fonction d'explication reste fondamentale pour les démonstrations, parce qu'elle garantit justement le support nécessaire à la compréhension, mais une telle fonction dépend étroitement de l'interprétation des énoncés en jeu et de la valeur de vérité correspondante que l'on reconnaît à chacun d'eux. En conséquence, même si du point de vue théorique, une démonstration peut être considérée comme tout à fait indépendante de l'interprétation et donc de la valeur épistémologique attribuée aux propositions en jeu, du point de vue cognitif, il est impossible de faire abstraction de cet aspect.

La discussion de Duval permet toutefois de montrer clairement le danger qu'il y a à se placer sur un plan sémantique et focaliser l'attention sur la valeur épistémologique des énoncés : la rupture peut être irrémédiable, et l'argumentation entendue comme processus dont la finalité est d'agir sur la valeur épistémique d'un énoncé; elle peut même empêcher la production d'une "démonstration", c'est-à-dire d'une argumentation correcte qui suit les règles d'acceptabilité propres à la communauté mathématique[1] .

Du reste, la distinction entre les techniques argumentatives et leur pertinence par rapport au problème de la construction de connaissances n'avait pas échappé à la subtile analyse des anciens. Aristote, à propos des techniques argumentatives, souligne dans son traité sur la rhétorique, l'inadéquation d'un certain langage dans le cas de la géométrie.

> "Le choix du langage [2] est une opération nécessaire quel que soit le type d'enseignement, du moins en partie. En ce qui concerne l'énoncé, en effet, le choix de l'expression fait toute la différence. Mais pas outre mesure parce qu'il s'agit toujours d'une question de sensibilité[3], et c'est quelque chose qui concerne seulement l'auditeur : c'est pour cela que personne n'enseigne la géométrie de cette manière».
>
> (Aristote, Rhétorique, III, 1, 1404 a 10...)

Le problème fondamental semble donc être celui de résoudre le conflit possible entre les deux fonctions, expliquer et valider, et parvenir à une pensée flexible qui sache passer, de manière désinvolte et consciente, du niveau intuitif, (celui) de la vérité en termes de significations des énoncés, au niveau formel de la validité, en termes de relations de dépendance logique entre les énoncés.

Du reste, la pratique des mathématiciens est, à cet égard, éclairante; chaque mathématicien est convaincu de démontrer des théorèmes vrais, mais, en même temps, la vérité est comprise en

---

[1] C'est seulement en comprenant le jeu de la déduction à l'intérieur d'une théorie qu'il est possible de dépasser la difficulté de signification qu'ont les élèves quand on leur demande de démontrer des faits connus et évidents.

[2] léxis : soit la manière de parler, de prononcer, etc.

[3] phantasia : une simple affection de l'âme (pathos), et comme telle, différente de la raison et inférieure à celle-ci.

des termes correspondant à une certaine théorie. Il s'agit d'une **vérité relative**, dérivant de l'hypothèse de vérité faite pour les axiomes et de l'hypothèse du fait que les règles d'inférence acceptées “transforment la vérité en vérité”. La relativité du sens du vrai est cependant fondamentale : les axiomes ne sont pas des “vérités absolues”, et encore moins des vérités factuelles.

> “A statement B can be a theorem only relatively to some theory; it is senseless to say that it is a theorem (or a truth) in itself: even a proposition like '2+2=4' is a theorem in a theory A (e.g. some fragment of arithmetic)”.
>
> (Arzarello, 2000)

On n'arrive pas spontanément au contrôle – qui est souvent un fait automatique et inconscient - et que l'expert réalise à partir de la relativité du sens de vérité ; il nous semble que ce soit plutôt une conquête et, dans ce sens, un objectif formateur.

Du point de vue didactique, il semble évident que la persistance de la confusion entre les deux points de vue, sans que soit clarifié le rapport entre fonction d'explication et fonction de validation, conduit à la production d'une démonstration plus laborieuse et parfois impossible.

> “Ce serait à mes yeux une erreur de caractère épistémologique que de laisser croire aux élèves, par quelque effet jourdain, qu'ils seraient capables de production de preuves mathématiques quand ils n'auraient qu'argumenté”.
>
> (Balacheff, 1999)

Dans le même temps, les aspects de continuité entre l'argumentation et la démonstration, entre la fonction d'explication et celle de validation, non seulement ne peuvent être ignorés, mais ils peuvent donner des indications intéressantes du point de vue didactique, offrant des indications sur la manière d'orienter l'intervention didactique en vue d'initier les élèves à la démonstration.

La notion d'Unité Cognitive

La continuité entre processus argumentatifs et processus démonstratifs se manifeste dans la notion d'Unité Cognitive. La notion d'UC est née d'une analyse historico-épistémologique, qui a mis en évidence des éléments de continuité entre le processus de production d'une conjecture et la démonstration ultérieure de celle-ci.

A ce propos, Lakatos décrit magistralement le lien entre les argumentations qui accompagnent la formation d'une conjecture et la démonstration qui en dérive (Lakatos, 1976); d'autres pistes, dans ce sens, nous sont également données par les récentes réflexions, sur le travail de production de théorèmes, de mathématiciens contemporains (Thurston, 1994).

Du point de vue de la didactique, des signes de processus similaires dans les productions des élèves étaient reconnaissables dans les résultats décrits par certains auteurs en particulier (Harel & Sawder, ...). L'hypothèse d'une continuité possible entre la démonstration d'un énoncé et le processus de production de la conjecture de cet énoncé, a conduit à l'étude

attentive de ces processus (Boero et al. 1996, Garuti & Boero, 1997) et à la définition de la construction théorique de l'Unité Cognitive (Mariotti. et al. 1997).

Definition de l'Unité Cognitive

La notion de l'UC, utilisée comme instrument d'analyse des processus, permet de mettre en évidence les potentialités de certaines situations problématiques en ce qui concerne l'initiation des élèves à la démonstration, et permet, en même temps, de mettre en évidence de possibles obstacles. L'analyse des cas où l'UC est absente permet, en effet, d'avancer des hypothèses en termes d'obstacles.

Produire des théorèmes et les produire complètement, c'est-à-dire de la formulation de la conjecture dans un énoncé, à la construction de la démonstration, semble être une bonne approche à l'idée de démonstration. La présence de processus argumentatifs dans le cas de problèmes ouverts qui ont besoin de la formulation et de la démonstration d'un énoncé, conduit à suggérer ce type de contexte dans la mesure où celui-ci est encourageant en termes didactiques (Boero et al. 1996).

Nous prendrons quelques exemples et nous tenterons de montrer comment la notion d'UC peut nous être utile pour analyser les processus impliqués dans la production de démonstrations.

Un exemple d'unité cognitive

L'exemple suivant est tiré d'une recherche (Maracci, 1998) qui a été menée à travers des entretiens avec un échantillon d'élèves de troisième année d'un lycée scientifique. Ce sont de très bons élèves, qui ont suivi un cours de géométrie déductive.

Considérons le problème suivant :

***Problème 1** : soit deux segments égaux (congruents), construire deux triangles égaux (congruents) qui aient un sommet en commun et ces deux segments comme côtés homologues.*

En général, la résolution de ce problème s'effectue après une longue recherche; l'élève s'engage dans une activité complexe d'exploration, au cours de laquelle de nombreuses argumentations sont produites, qui soutiennent diversement la recherche de la solution. Ces argumentations forment une base pour la démonstration qui est proposée par la suite. En réalité, dans ce cas-ci, quand la construction est identifiée, les propriétés qui la mettent en relation avec les données du problème sont déjà déterminées, la démonstration consistant simplement à réordonner ces relations.

Stefano est un élève de 1ère dans un lycée scientifique, et il a suivi un cours de géométrie déductive dans le cadre axiomatique des transformations géométriques. Stefano lit l'énoncé du problème. Il en saisit la complexité, que ce soit pour la variété ou le nombre de relations géométriques possibles; il comprend aussi que le problème exige des cas.

Stefano (18 ans, III Liceo Scientifico) Problème 1

43. Ste: [...] Disons qu'on va dessiner deux triangles égaux avec un sommet en commun, et voyons comment j'arrive à les trouver...alors – il dessine (dess.5) un triangle – voilà le triangle A..., le triangle ABO (il inscrit les lettres) – il dessine un autre triangle avec un somment en O – faisons semblant qu'ils sont égaux, ça c'est le triangle, bon, CDO (il inscrit C et D) – il trace BC et sa perpendiculaire pour O – c'est bon comme ça, le sommet des deux semble être sur la perpendiculaire à BC, pourquoi?... alors...
[...]
48. Ste: à mon avis, c'est la perpendiculaire, et elle est exactement l'axe de BC

Le fait d'avoir saisi les réquisits du problème conduit Stefano, après une brève analyse, à la production d'une nouvelle conjecture, encore partielle, qui n'est pas explicite en termes précis mais qui semble acquérir la force et le caractère d'une intuition.

50. Ste: [...], si j'arrive à démontrer que O appartient à l'axe de CB, c'est que j'y suis arrivé.

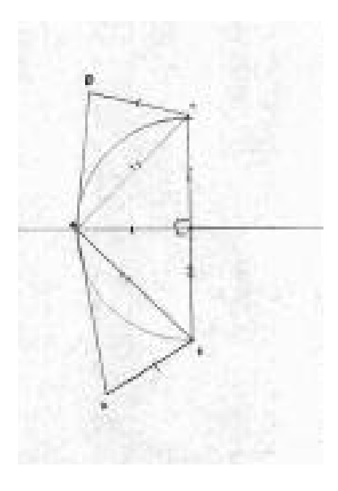


Fig.1 Stefano dessin 5 – Problème 1

Stefano a utilisé la méthode classique d'"analyse et synthèse"; partant de l'hypothèse que O doit appartenir à la droite de symétrie de BC, Stefano démontre l'égalité des segments BO et OC, et il poursuit...

111.Ste: j'ai deux côté égaux, il me suffit de trouver cet angle (il indique les angles DCO et ABO) ou ce côté (il indique OD et AO), en théorie
116.Int: nous voudrions, par exemple, que le côté AO
117.Ste: (interrompant) soit égal au côté OD

118.Int: et alors, où allons nous trouver O?
119.Ste: nous devons trouver... qu’est-ce que je suis bête!

Maintenant, Stefano est arrivé à la solution ; le dessin produit présente (une fois encore) un cas particulier : où les deux axes ne se rencontrent pas sur la feuille; cela conduit Stefano à douter, mais malgré tout, il parvient à aller au bout de son raisonnement et à formuler la conjecture:

169.Ste: c’est le point d’intersection entre les deux axes des segments, ce devrait donc être le point qui se trouve à égale distance de A et de B (il les indique), et le point, c’est un point qui est à égale distance de C et de D (il les indique), il n’est pas dit que la distance...
171.Ste: pardon, de A... de A et de C et de B et de D, (...) – il trace les deux couples de côtés des triangles – j’ai réussi, j’ai réussi; j’ai réussi?
173.Ste: alors
174.Int: tu es sûr qu’il est à égale distance de A et de C?
175.Ste: oui
176.Int: Pourquoi?
177.Ste: parce que l’axe, il fait partie de l’axe du segment AC
178.Int: et c’est vrai qu’il est à égale distance de B et de D?
179.Ste: oui, parce que c’est pareil, parce qu’il fait partie de l’axe de B et de D, de BD; donc, ce côté est égal à celui-ci par hypothèse (il indique AB et CD), ce côté est égal à celui-ci (il indique OB et OD), et ce côté est égal à celui-ci (il indique AO et OC), donc, nous avons deux triangles avec trois côté égaux qui, en théorie, devraient donc être égaux. Le problème est qu’il m’a semblé que je ne peux pas le faire pour tous les cas.

Comme nous venons de le voir, la démonstration résume toutes les propriétés élaborées durant la phase de production de la conjecture. Dans ce cas, nous parlons d’unité cognitive, la démonstration utilisant les mêmes arguments qui, petit à petit, avaient émergé, sous des formes différentes, et avaient porté la production de la conjecture.

Cet exemple nous montre aussi comment l’exploration et la production de la conjecture se déroule avec une référence constante à un système théorique (axiomes, définitions, théorèmes) dans le quel Stefano pense devoir justifier la solution.

L’unité cognitive comme révélateur de difficultés

Voyons maintenant quelques exemples où la notion d’unité cognitive, utilisée comme instrument d’analyse du rapport entre processus de production et conjecture, et processus de production et démonstration, permet de mettre en évidence des difficultés.

Prenons le problème suivant :

Problème 2 *: "Soit un point et une droite, déterminer le lieu des points équidistants du point et de la droite „.*

Examinons une fois encore le comportement de Stefano face à ce nouveau problème. L'intuition de la solution est très rapide, la conjecture est produite sans difficulté et n'est pas reproduite pour être confirmée ni pour trouver une formulation plus précise. Mais il se demande immédiatement : comment puis-je le démontrer? C'est là qu'il semble commencer une recherche de propriétés qui puissent être utiles pour la démonstration.

Stefano (18 ans, III Liceo Scientifico) Problème 2

2 S: (*il pose sa règle sur la feuille pour prendre les points moyens des segments tracés*) mon intuition me dit que c'est la droite... le lieu, c'est la droite, disons équidistante du point P et de la droite r, mais c'est seulement une intuition...
[...]
4 S: elle est parallèle à r... voyons maintenant... alors (*il inscrit les lettres aux extrémités et aux points des segments tracés*)

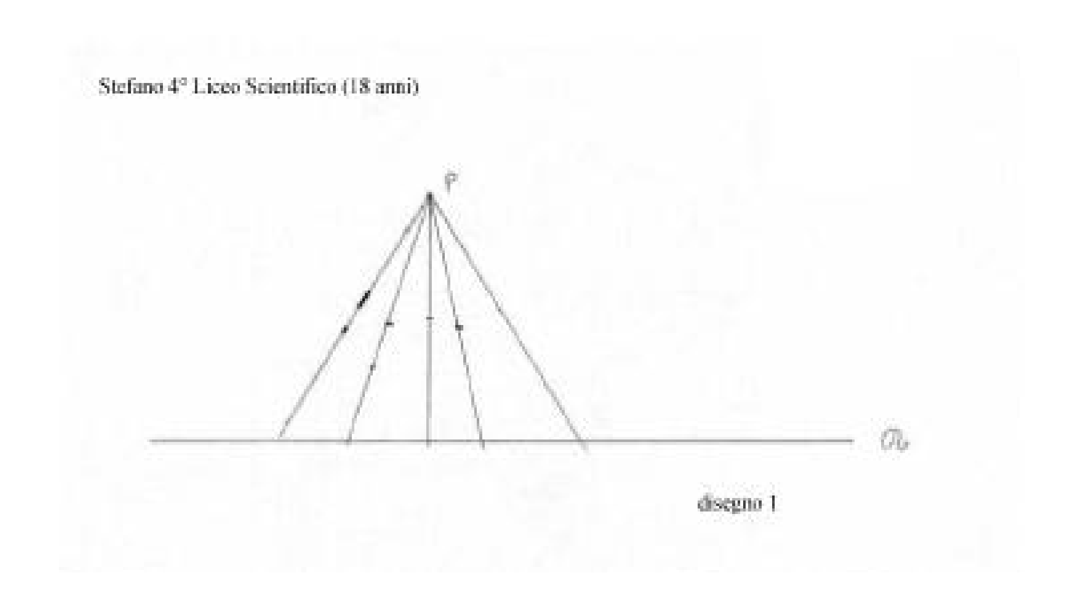


fig. 2 Stefano dessin 1 – Problème 2

5 S: ce sont toujours des points au milieu des segments, je veux dire équidistants... non, ils ne sont pas équidistants... ils sont équidistants du point sur la droite et du segment (*il indique de manière confuse, il semble indiquer le point P*)... je trace une droite parallèle à r et passant par P

(*il la trace et l’appelle s, pour M’, il trace le segment perpendiculaire à r, passe son stylo sur la figure, surtout sur les éléments du dessin “proche de M’*)
6 S:(*à voix basse*) dans les symétries du centre... – il passe son stylo sur la figure
7 S: (*à voix basse*) comment expliquer qu’ils sont alignés?... – il passe son stylo sur la figure

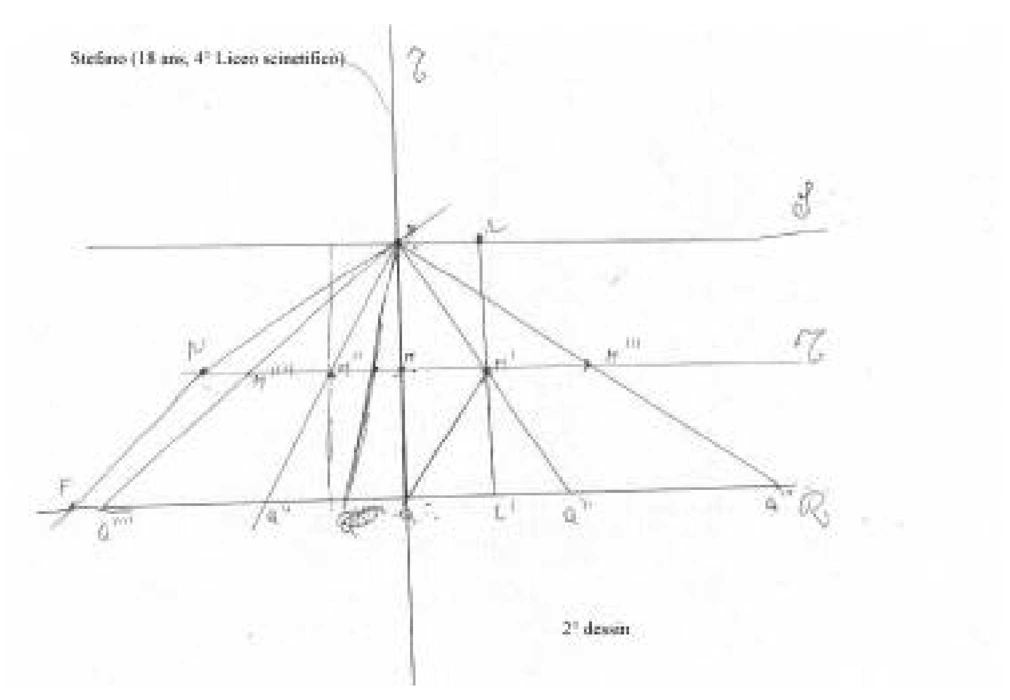


Fig. 2 Stefano dessin 2 – Problème 2

Il est intéressant de souligner comment, dans ce cas-ci, la première caractérisation (2), “la droite, disons, équidistante du point P et de la droite r”, qui exprime d’une certaine manière l’intuition initiale, restera (voir plus loin) le noyau de la démonstration qui s’accomplira ultérieurement et non sans difficulté.

La première tentative (6) d’impliquer les symétries représente le passage au plan théorique où Stefano va chercher les instruments pour la démonstration. Rappelons que Stefano a suivi un cours de géométrie déductive dans le cadre théorique des transformations. La référence aux symétries pourrait avoir été suggérée par le milieu du segment (5); ou bien, il se pourrait que Stefano se soit souvenu que les symétries centrales transforment une droite en une droite parallèle.

Le commentaire qui suit (7) montre que la première tentative, peut-être un peu “trop mécanique” de recours à la théorie, est un échec.

Stefano semble alors revenir à sa première intuition, et tente d’élaborer l’idée d’équidistance”, utilisant des symétries pour en déduire l’égalité des distance... jusqu’à ce qu’il admette

27 S: (*à voix basse*) je n’arrive pas à trouver le moyen de résoudre le problème

28 M: reprenons un instant, tu penses que...

A présent, l'idée d'équidistance s'est déplacée de la relation entre droite et point, à la relation entre droites, mais c'est précisément le fait de raisonner en termes d'équidistance, en particulier d'équidistance entre deux droites, qui permet à Stefano de trouver finalement son chemin.

33 S: parce que si leur distance aux droites est la même et qu'ils ont tous la même distance aux droites, c'est qu'ils sont alignés, ils font partie de l'axe de symétrie qui porte r en s.

C'est donc effectivement le lien entre l'intuition initiale d'"équidistance" et l'élément théorique "symétrie axiale" qui permet d'interpréter les relations, saisies intuitivement, en termes de "symétrie axiale", et de porter à terme la démonstration.

En ce qui concerne ce problème, l'intuition a, en général, une racine très profonde dans une "gestalt" du dessin initial dont l'immédiateté échappe au contrôle théorique, du moins à la première approche. Pour parvenir à la solution, aucun passage déductif de propriétés exprimées par des théorèmes à la théorie n'est nécessaire, l'image solution se présente immédiatement.

En outre, exprimer verbalement une intuition, donné d'un seul "coup d'œil", immédiatement, n'est ni simple ni spontané; l'image solution ne jaillissant pas d'une analyse géométrique de la figure, elle peut ne pas être caractérisée par des propriétés liées aux données du problème. En effet, il peut arriver que, quand le sujet essaie de caractériser l'image-solution, il le fait en explicitant des propriétés géométriques de la figure telle qu'elle apparaît ou telle qu'elle a été dessinée, mais pas nécessairement à travers des propriétés qui lient la solution aux données du problème.

La différence entre les diverses caractérisations de la droite solution, aucune d'elles n'étant ancrée à une argumentation qui ait soutenu la production de la conjecture, marque une rupture entre le processus de production de la solution en termes de conjecture et le processus de construction de la démonstration; mais surtout, elle crée des difficultés, parce qu'en l'absence d'une caractérisation précise, on est incertain sur ce qu'on doit démontrer.

Mais il y a d'autres difficultés qui sont mises en lumière par une subtile analyse en termes d'UC : la description du rapport entre l'argumentation et la démonstration, au-delà de l'affirmation d'une distance ou d'une différence, s'enrichit d'une description plus fine des liens nécessaires présents ou manquants.

Une description plus riche prévoit de prendre en compte, d'un côté le processus de production d'une conjecture relativement à un système de conceptions et de techniques argumentatives liées au sujet, de l'autre la nécessité d'inclure la démonstration dans un cadre plus large et plus précis, qui tienne compte de tous les éléments en jeu et de la "démonstration" . En particulier, comme nous l'avons déjà dit, il ne faut pas oublier le fait **que**

il n'y a pas de démonstration sans théorie, le fait qu'une démonstration ait un sens seulement en référence à une théorie, i.e. des axiomes, des définitions, des théorèmes …

Donc d'un point de vue didactique, un des aspects cruciaux semble être celui de la nécessité d'élaborer un sens de la démonstration comme strictement lié à celui de la théorie.

Si on considère les premières observations qui ont conduit à l'élaboration de la construction de l'UC, on voit que la modélisation de phénomènes (celui de l'ombre du soleil par exemple) donne lieu à la construction d'un modèle théorique à partir de principes qui trouvent leur pertinence et leur acceptabilité dans l'expérience ; de tels principes deviennent à la fois des principes explicatifs pour les phénomènes et des principes de déduction dans la théorie. Les activités de production de conjecture se joignent à leur élaboration en théorie, fournissant un cadre intellectuel où la continuité entre le moment de l'argumentation et celui de la démonstration est fortement favorisées.

Démonstration et théorie

Nous voici donc face à un problème important du point de vue didactique : l'initiation des élèves à la démonstration doit prendre en compte le problème de leur initiation à l'idée de théorie. Le développement qui suit présente une proposition élaborée à partir de ce problème didactique dans le cadre d'un projet coordonné, conduit par les groupes de recherche de Gênes, Pise et Modène (Mariotti et autres, 1997).

Les champs d'expérience pour l'initiation à la pensée théorique : artéfacts et instruments

Le cadre de référence au sein duquel se déroule la discussion que nous entendons développer est celui de la théorie vygotskienne; dans ce cadre, il est possible de donner une interprétation de la fonction jouée par des artéfacts particuliers quand ceux-ci sont introduits dans la pratique scolaire et utilisés par l'enseignant comme *instruments de médiation sémiotique* (Vygotsky, 1978).

Par artéfact, on entend un produit particulier, projeté et construit par l'homme; une classe particulière d'artéfacts est constituée par ces objets dont l'utilisation a comme finalité d'atteindre des buts bien particuliers; un tire-bouchon est un bon exemple d'artéfact !

Dans la pratique didactique, l'utilisation d'objets communs n'est pas nouvelle, c'est plutôt l'interprétation de ces objets en termes de médiation sémiotique qui l'est.

A ce propos, un exemple intéressant nous est donné par le projet développé par le Groupe de Modène (coordonné par Bartolini Bussi). Il s'agit d'une expérience qui a de nombreuse affinités avec la nôtre. Dans les deux cas, la signification que l'on entend introduire et par rapport à laquelle on utilise un artéfact comme médiateur sémiotique, est celle de Théorème en liaison étroite avec celle de Théorie (Bartolini Bussi et al., 1999).

Dans ce cas précis, les artéfacts culturels sont les systèmes d'engrenage, et la théorie de référence est la cinématique de Héron (livre 1er de la mécanique, premier siècle après Jésus-Christ). Un principe facilement acceptable et qui peut être mis à la base d'une théorie est le suivant : "Deux cercles engrenés tournent en direction opposée. L'un vers la droite, l'autre vers la gauche".

On peut tirer de ce postulat bien des théorèmes intéressants. L'expérience se déroule dans une classe de CM1, et malgré l'âge des élèves, on observe que la plupart d'entre eux est en mesure de produire des énoncés généraux relatifs au mouvement des engrenages, et de construire des argumentations pour les justifier, en ayant recours au principe établi. Dans ce sens, il est possible de parler de pensée théorique.

Micromondes et théorie

Il existe une proposition pour initier les élèves à l'idée de théorie, qui serait celle de considérer les potentialités offertes par certains micromondes.

L'utilisation de certains systèmes informatiques, en particulier des logiciels, à des fins éducatives est bien connue. C'est à partir de S. Papert que l'idée de construire et d'utiliser des logiciels, des micromondes, dans la pratique scolaire a été élaborée et longtemps étudiée (Hoyles, 1993). L'approche qui a inspiré la première idée d'utiliser des micromondes à des fins éducatives pose un grand nombre de problèmes, et sa faiblesse intrinsèque conduit à une nécessaire évolution du cadre théorique qui rende justice à la complexité des rapports en jeu entre élève et "milieu".

> "Dans cette forme avancée du constructivisme, la connaissance n'est plus une propriété du seul sujet mais celle d'un complexe formé par le sujet, le milieu et leurs interactions".
>
> (Balacheff, 1998, p. 2O)

L'analyse doit être fine pour rendre compte des aspects spécifiques du milieu et des dynamiques interpersonnelles, qui entrent en jeu dans la construction de la connaissance. L'approche que nous proposons n'en exclue pas d'autres, mais porte son attention sur l'artéfact (dans ce cas le micromonde) et sur son fonctionnement en tant que médiateur de significations. Conformément à ce que nous avons dit précédemment, nous considérons qu'il est fondamental de ne pas séparer l'approche de l'idée de démonstration de celle de théorie. Nous considérons en fait que l'initiation à l'idée de démonstration, qui est cruciale, doit s'élaborer en même temps que la construction de l'idée de théorie.

Nous proposons ci-dessous une approche particulière de la perspective théorique, basée sur un champ d'expérience spécifique qui a comme élément caractéristique l'utilisation des potentialités offerte par le Micromonde Cabri Géomètre (Baulac, Bellemain, & Laborde, 1988).

Comme cela a été discuté ailleurs de manière plus vaste (Mariotti, en cours de publication), un micromonde particulier, celui de Cabri par exemple, peut être interprété comme un artéfact culturel, et son fonctionnement, dans le cadre des activités scolaires, peut être interprété en

termes de médiation sémiotique. Les éléments caractéristiques qui font d'un micromonde un instrument de médiation sémiotique concernent sa nature d'artéfact culturel tout autant que son utilisation spécifique dans les activités scolaires.

Cabri, comme d'autres micromondes, est un artéfact produit par notre culture dont il incorpore une partie du savoir ; il incorpore en particulier une grande partie de la théorie élémentaire de la géométrie. C'est grâce à ce savoir incorporé que Cabri fournit un système d'instruments qui, renvoyant à ce savoir, peuvent fonctionner non seulement "vers l'extérieur" (Vygotsky, 1978), mais produire aussi des dessins particuliers "vers l'intérieur", contribuant ainsi à la construction de significations relatives au savoir incorporé, et à la théorie géométrique en particulier.

Ce qui rend Cabri particulièrement intéressant, notamment par rapport à d'autres logiciels "graphique et dynamiques", c'est le fait que le savoir incorporé est en parfaite adéquation avec la théorie géométrique : en d'autres termes, c'est le savoir géométrique, dans ses assises théoriques, qui est incorporé dans Cabri et, comme tel, fournit un instrument de médiation complexe mais non moins puissant pour la signification de la théorie. C'est dans cette perspective que nous avons utilisé Cabri dans notre expérience menée depuis quelques années à Pise, dans certaines classes des deux premières années de l'école secondaire supérieure; c'est également dans cette même perspective qu'il a inspiré le projet et la mise au point d'un logiciel pour l'algèbre, « L'algebrista » (Cerulli, 1999, Cerulli & Mariotti, 2000) qui en préserve certaines des caractéristiques fondamentales du point de vue de la fonction de médiation vis-à-vis de la signification de la théorie.

Dans le cas qui nous intéresse, le micromonde incorpore une théorie, la géométrie euclidienne dans le cas de Cabri, l'algèbre des expressions littérales dans le cas de L'Algébrista.

Les objets informatiques, à travers lesquels l'élève interagit avec le micromonde, peuvent être pensés comme des signes extérieurs avec une référence à la théorie en jeu et à ses éléments (axiomes, définition, théorèmes...), et comme tels, ils peuvent devenir des "instruments de médiation sémiotique" (Vygotsky, 1978), utilisés par l'enseignant pour réaliser une activité de classe dans le but d'initier les élèves à une perspective théorique.

L'activité en classe est organisée en référence au Champ d'Expérience, celui des « constructions géométriques » dans l'environnement Cabri, celui des manipulations symboliques dans l'environnement L'Algébriste. Le terme Champ d'Expérience est utilisé suivant la définition de Boero & autres (1995).

'the system of three evolutive components (external context; student internal context; teacher internal context), referred to a sector of human culture which the teacher and students can recognise and consider as unitary and homogeneous'

Le champ d'expérience se développe à travers les activités sociales de la classe, en particulier à travers les interactions réalisées dans l'activité collective visant à la construction sociale du savoir : les "Discussions mathématiques" (Bartolini Bussi, 1998).

> ‘polyphonys of articulated voices on a mathematical object, that is one of the objects - motives of the teaching - learning activity’
>
> (Bartolini Bussi 1996)

La polyphonie se réalise entre le registre de la pratique et celui de la théorie. La pratique est relative à l’expérience commune (du dessin ou du calcul) alors que la théorie est relative à la Théorie géométrique incorporée dans les logiciels (Cabri ou L’algébriste), et représentée par les phénomènes observables sur l’écran et par les commandes disponibles.

Comme nous venons de le voir, les éléments du logiciel qui sont observables et utilisables peuvent être considérés comme des signes extérieurs pertinents pour des éléments de la théorie.

Le champ d’expérience des constructions de Cabri

Dans le cas du micromonde Cabri, un élément caractéristique est constitué par la possibilité du déplacement (« dragging » en anglais). Le fait que le micromonde incorpore la théorie géométrique s’exprime à travers le fait que le comportement des figures de Cabri (computational objets Noss & Hoyles, 1996), sous l’effet du déplacement, dépende des liens logiques entre les éléments de la figure tels qu’ils ont été exprimés à travers les commandes utilisées; en d’autres termes, le déplacement consitue la contrepartie extérieure directe (signe) du contrôle théorique.

Cela signifie que la stabilité d’une construction sous l’effet de l’enchaînement correspond au fait que dans le cadre de la théorie, il existe un Théorème qui valide la construction exécutée. La justification, c’est-à-dire ce qui explique le « pourquoi » d’un phénomène parfaitement reconnaissable sur l’écran, peut être donné en termes de théorie géométrique, celle-là même à laquelle les commandes font référence.

Les problèmes de construction deviennent ainsi, de manière naturelle, des problèmes théoriques, une fois qu’ils sont plongés dans le milieu Cabri et que se pose le problème d’expliquer pourquoi une construction donnée est stable dans le déplacement.

Selon notre hypothèse, en accord avec ce changement de signification du problème de la construction, on s’attend à ce que la signification de “justification” change elle aussi, en prenant une perspective plutôt théorique.

Il y a deux aspects cruciaux qui entrent en jeu pour comprendre ce que signifie « démontrer » : la nécessité de fournir une justification et le fait que cette dernière doit être construite à l’intérieur d’un système théorique particulier. L’évolution doit donc partir d’une nécessité générale de justifier avec l’intention de donner une validation à l’intérieur d’un système théorique.

Le problème crucial reste cependant celui d’établir un lien explicite entre un cadre phénoménologique, Cabri et ses figures, et une théorie, la géométrie.

L’idée générale a été celle d’utiliser l’environnement Cabri et d’introduire graduellement les étudiants à une géométrie déductive en construisant une correspondance entre la logique du logiciel et la théorie géométrique, fondée sur la correspondance entre les commandes de Cabri et les propriétés acceptables dans la théorie. Le problème central consiste dans la négociation des règles pour l’acceptabilité d’une construction. Cabri est un micromonde qui correspond à la géométrie Euclidienne du plan, la « géométrie de la règle et du compas ». Mais, en effet, le système mathématique subjacent est trop complexe : les instruments géométriques disponibles dans le “menu” standard de Cabri rendent disponible une richesse de propriété théoriques difficile à être contrôlé ; en d’autres termes, dans l’accomplissement d’une tâche, il est difficile d’établir ce qui, à un moment donné, fait partie de la théorie et ce qui doit être encore démontré.
Pour dépasser la complexité relative à cette ambiguïté entre démonstration et théorie de référence, on a pensé de ne pas utiliser le menu standard de Cabri, mais plutôt de réaliser notre menu, petit à petit avec les étudiants.
Au début un menu vide a été présenté et on a discuté du choix des commandes à introduire, en correspondance des assertions spécifiques choisies comme faits de base dont on doit partir (ces seront nos axiomes).
Par la suite, au fur et à mesure que de nouvelles constructions ont été réalisées et acceptées en correspondance avec de nouveaux théorèmes démontrés, l’introduction des commandes correspondantes a été discutée et négociée avec les étudiants. De cette façon, nous avons cherché à ce que les étudiants participent à la construction d’une axiomatique et au menu correspondant dans l’environnement Cabri.
La gradualité avec laquelle les éléments de la théorie sont introduits trouve un élément correspondant dans la transformation successive du menu qui acquiert de nouvelles commandes.
En même temps, le système géométrique est construit graduellement, de façon à ce que la complexité augmente petit à petit : l’objectif est de fournir des niveaux successifs de difficulté qui peuvent être affrontés par les étudiants. Si tout le système est présenté dès le départ, on court le risque que les étudiants ne soient pas en mesure de contrôler toutes les relations en jeu, plus particulièrement les relations entre ce *qui est donné* et ce qu’on doit démontrer.

Evolution de la signification de justification.

L’analyse des copies des étudiants montre un processus d’évolution de la signification de “construction”. Les descriptions des procédés changent : à travers une maîtrise croissante des termes, la clarté s’améliore et dans le même temps, les argumentations s’approchent de plus en plus au statut des théorèmes, c’est-à-dire que les justifications fournies par les étudiants prennent de plus en plus la forme d’un énoncé suivi par la démonstration relative. Une analyse attentive montre également que ce procédé est très lent et fatigant.

Voyons quelques exemples, concernent des problèmes de construction en environnement Cabri. Il s'agit de deux des activités proposées, la situation prévoit l'utilisation d'un "menu réduit", contenant les commandes correspondant aux premières phases de la théorie.
Par rapport aux axiomes classiques euclidiens, outre aux éléments de base (point, droite (par deux points) et circonférence (centre, point), il est possible d'utiliser seulement les commandes "report de segment" et "report d'angle» . D'un point de vue théorique, cela correspond à disposer des trois "critères de congruence" qui viennent ainsi à constituer les trois premiers axiomes de la théorie. Les activités qui ont suivi ont permis d'introduire de nouveaux éléments de la théorie : pour la bissectrice d'un angle on a élaboré une définition, une construction et le théorème qui la justifie, et après, pour la perpendiculaire, on a élaboré une définition comme bissectrice d'un angle plat.
Tout cela constitue la "théorie" à laquelle les étudiants peuvent et doivent faire référence dans leurs justifications au moment quand on leur propose le problème suivant :

"Construisez avec Cabri la perpendiculaire à une droite donnée par un de ses points. Décrivez et justifiez géométriquement la construction réalisée".

Les étudiants travaillent par groupes sur un même ordinateur. Pour la solution ils doivent réaliser une image sur l'écran mais aussi un texte écrit.
L'individualisation du procédé à suivre n'a pas crée de difficultés excessives. Mais, le fait de réaliser la construction correctement représente seulement la première phase du travail. Les difficultés se présentent tout d'abord lorsqu'il s'agit de verbaliser le procédé suivi et de fournir une justification de son exactitude.
Prenons la copie suivante :

L & C (15 ans I Liceo Scientifico)

> Dans le menu nous avons l'intersection et la bissectrice d'un angle.
> Nous avons dessiné une droite et nous avons pris un point de cette droite, nous avons construit deux autres cercles avec leur centre dans les intersections du cercle avec la droite, puis grâce à la commande de la droite par deux points, nous avons dessiné une autre droite passant par les intersections des deux circonférences et celle-ci est la perpendiculaire. La perpendiculaire est la bissectrice de l'angle plat et une bissectrice divise l'angle en deux angle égaux (*je démontrerai que les angles a et b sont égaux puisque ce sont des angles de deux triangles égaux*)[4] en effet a et b sont égaux car ce sont des angles de deux triangles égaux.

[4] La phrase en italique a été affacé.

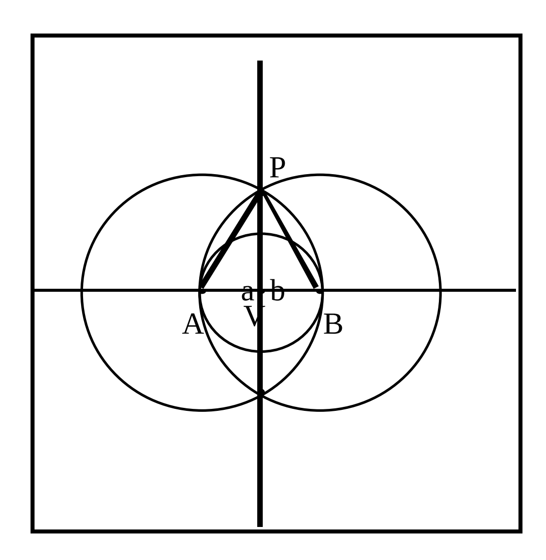


Fig. 4 La construction de la perpendiculaire donné par L&C

La construction est correcte et la description assez précise, mais on ne spécifie pas comment le point sur la droite a été pris ni comment a été dessiné le cercle avec son centre en ce point.
La justification donnée contient le raisonnement correct, qui fait référence à la définition de perpendiculaire ; elle montre également comment les étudiants ont la conscience du fait que l'égalité entre les deux angles doit être déduite de l'égalité des deux triangles - peut être APV et BPV, mais on ne procède pas à l'individualisation des deux angles et à justifier qu'ils sont égaux.
Donc un premier embryon de démonstration est présent bien qu'il ne soit pas totalement développé. Il semblerait que la vision directe de la figure ait encore le dessus sur le contrôle des différentes actions et des relations géométriques par rapport à l'intuition globale de l'égalité de deux figures.
Est intéressant de noter que dans la version éliminée il y a des traces du raisonnement indirect suivi et dans un certain sens du projet de justification, voilà encore un exemple d'Unité Cognitive.
Prenons maintenant deux autres exemples, relatifs à une consigne successive à la tâche relative à la construction de la perpendiculaire. La consigne est la suivante.

"Construisez avec Cabri le milieu d'un segment. Décrivez et justifiez géométriquement la construction réalisée"

<u>S & C</u> (15 ans I Liceo Scientifico)

Ayant un segment construisez le point médian

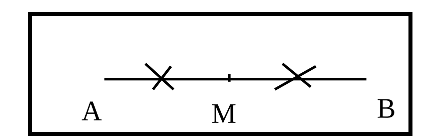


Fig. 5 Dessin 1 de S&C.

Nous avons construit un segment AB, nous avons fait deux circonférences qui se croisent au niveau des points P et P’. Nous avons tracé l’intersection de deux objets entre les deux circonférences et entre les circonférences et le segment.

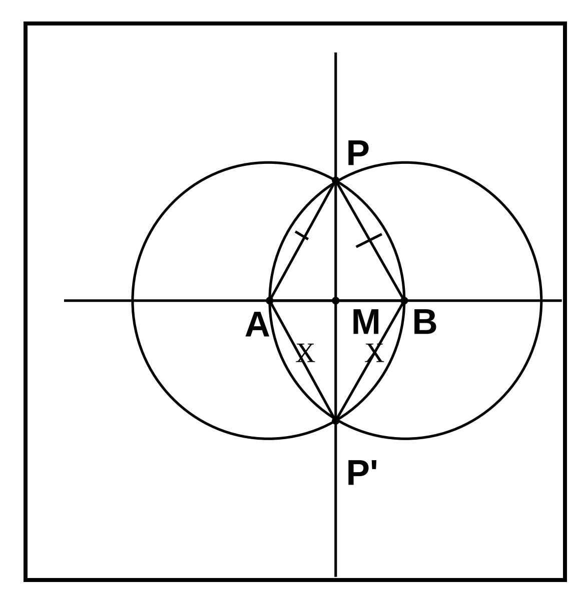


Fig. 6 Dessin 2 de S&C .

Nous avons uni les points P et P’ avec une droite et nous avons fait l’intersection entre deux objets, c’est-à-dire entre segment et droite. Je considère les triangles PAP' et PBP' qui ont en commun : le côté PP' par construction.
AP = BP puisque ce sont des rayons de la même circonférence
donc Δ (PAP') et Δ (PBP') sont égaux selon le 3ième critère d’égalité

La description est en partie insuffisante, il n’y a pas d’indication sur la façon dont les deux circonférences ont été trouvées, alors qu’elle est très précise sur les intersections (entre deux objets).
L’application du 3ième critère est essentiellement correcte, même si pour l’application il manque un couple de côtés AP’ et BP’.
L’égalité de ces côtés est cependant indiquée sur la figure. Il semblerait que le rapport pas simple entre les rayons d’une même circonférence et les rayons de circonférences qui ont le même rayon ne soit pas totalement maîtrisé et cela peut avoir comporté la contraction de deux relations à une seule relation. En outre, il n’y a pas de passage définitif à la démonstration de l’égalité de AM et BM.

Nous sommes encore loin de la formulation complète et correcte du Théorème (énoncé et démonstration) qui fournit une validation théorique de la construction effectuée. Néanmoins, la copie montre que la solution a dépassé le niveau pratique communément assigné à un problème de construction ; en plus, en se déplaçant à l'intérieur du système géométrique, on va donner une justification en se référant.
L'exemple suivant se réfère encore au problème de la construction du milieu.

<u>G & C</u> (15 ans I Liceo Scientifico)

> Créez le milieu d'un segment.
> Je dessine un segment passant par deux points. Je construis trois autres points sur l'écran et j'y construis l'angle. Avec la commande "Report d'angle", je copie cet angle sur les sommets du segment et je crée l'intersection de ces deux nouvelles demi-droites. Avec la circonférence, je centre-pointe sur les sommets du segment et je pointe sur l'intersection des demi-droites en obtenant ainsi deux circonférences égales.
> En joignant les deux intersections je trouve le point médian O sur le segment .

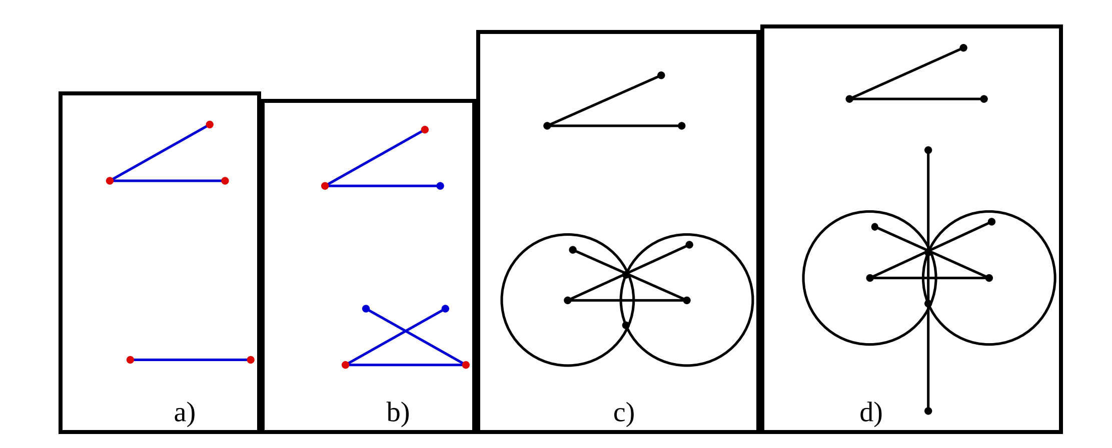


Fig. 6 Les passages de la construction de G & C . La copie ne contient pas de dessin, faisant probablement référence à la figure sur l'écran ; nous avons reproduit passage par passage la construction pour éclaircir le procédé.

> J'ai fait cela puisqu'en créant deux angles égaux sur ce segment, on crée un triangle isocèle.
> En utilisant les deux côtés égaux de ce triangle comme des rayons de deux nouvelles circonférences j'arrive à construire deux circonférences égales aux sommets du segment.

En ce que concerne le développement de la signification de la justification, cela est encore insuffisant : la description du procédé suivi se fonde avec la justification., Il y a aussi une

difficulté évidente à séparer l'aspect opérationnel, caractéristique d'une construction, de l'aspect logique - propositionnel, qui consiste à déterminer et exprimer les relations entre les éléments de la figure, déduites sur la base de la construction.
Mais, ce qui rend très intéressant cet exemple, c'est l'usage insolite d'une commande: le "report d'angle". Cette commande ne correspond à aucun usage de la règle et du compas, donc du point de vue pratique il n'a pas de sens, au contraire il a du sens du point de vue théorique par ce qu'il correspond à un des axiomes, qui ont été fixés dans la théorie.

Le cas de L'Algébrista

Comme nous venons de le voir, le micromonde Cabri et son utilisation en tant que médiateur sémiotique pour l'idée de théorie a inspiré le projet et la réalisation d'un prototype de micromonde pour l'algèbre. Rappelons brièvement quels ont été les éléments clés qui, tout comme pour le cas Cabri, ont guidé notre recherche dans le domaine de l'algèbre.
Le micromonde incorpore la théorie algébrique des expressions littérales; l'élément clé est la relation d'équivalence entre les expressions, qui est à la base de la manipulation syntaxique des expressions. L'idée est celle d'un micromonde des expressions algébriques où l'utilisateur peut agir en transformant ces expressions en fonction des propriétés fondamentales des opérations qui correspondent aux axiomes de la théorie où l'on procède. En d'autres termes, le manipulateur symbolique est totalement sous le contrôle de l'utilisateur qui transforme les expressions en utilisant pas à pas les propriétés théoriques exprimées par les commandes disponibles. La chaîne des transformations des expressions va correspondre à une chaîne déductive dans la théorie, et donc à la démonstration d'un énoncé concernant l'équivalence entre deux expressions.
Le micromonde ne détermine pas quelles sont les transformations qu'il faut effectuer, mais dirige le travail de l'élève en permettant seulement des transformations permises, c'est-à-dire celles qui correspondent aux axiomes de la théorie. Les activités dans le champ d'expérience des manipulations dans le micromonde L'Algébriste sont donc, comme dans le cas de Cabri, régies par la logique interne à la théorie incorporée. Les objets de calcul en jeu peuvent être interprétés (comme dans le cas de Cabri) comme des signes extérieurs des éléments clés de la théorie, et, dans ce sens, être utilisés comme instruments de médiation sémiotique.
Pour donner une idée du type d'activités qui se déroulent dans la classe, nous proposons ci-dessous un exemple issus de notre expérience en cours.
La tâche demandait la démonstration de l'équivalence entre deux expression littérales. Marta résout le problème dans l'environnement papier crayon, mais la démonstration qu'elle donne se réfère soit à la propriété, soit aux « boutons » des commandes.

Marta (15 ans I Liceo Scientifico)

$(a+b)\cdot a + a\cdot b = = (a+b)\cdot b + (-1)\cdot(b\cdot b) + a\cdot(a+b)$ commut.

" $= = (a+b)\cdot b + (-1)\cdot(b\cdot b) + (a+b)\cdot a$ commut.

" $= = (a+b)\cdot b + (a+b)\cdot a + (-1)\cdot(b\cdot b)$ commut.

" $= = (a+b)\cdot a + (a+b)\cdot b + (-1)\cdot(b\cdot b)$ distrib.

" $= = (a+b)\cdot a + (a\cdot b + b\cdot b) + (-1)\cdot(b\cdot b)$ bott. a risch.

" $= = (a+b)\cdot a + a\cdot b + b\cdot b + (-1)\cdot(b\cdot b)$ commut

" $= = (a+b)\cdot a + a\cdot b + b\cdot b + (b\cdot b)\cdot(-1)$ distrib.

" $= = (a+b)\cdot a + a\cdot b + (b\cdot b)\cdot(1+(-1))$ bott. di calcolo

" $= = (a+b)\cdot a + a\cdot b + (b\cdot b)\cdot(0)$ elemento neutro $[3 \Leftrightarrow 1+1+1]$

" $= = (a+b)\cdot a + a\cdot b + 0$ elemento neutro $[0\cdot\square \Rightarrow 0]$ $[0+\square = \square]$

$(a+b)\cdot a + a\cdot b = = (a+b)\cdot a + a\cdot b$

Il n’est pas possible de décrire ici de manière fine le processus évolutif des élèves, i.e. le processus de « internalisation » (Mariotti, en cours de publication) qui transforme des signes extérieurs pertinents au micromonde en instruments psychologiques, comme l’a expliqué Vygostsky (Vygotsky, 1978). Dans le cas spécifique, l’internalisation des commandes disponibles, et utilisés, dans les manipulations des expressions symboliques correspond au contrôle logico-théorique sur ces manipulations, et devient par conséquent déterminante dans la construction de la signification de la théorie et de la démonstration.

Le cas de Giulia

Pour finir, je voudrais revenir au thème de l’UC et présenter un exemple qui illustre comment la notion d’UC permet de déterminer les difficultés en les interprétant en termes de relation entre processus argumentatifs et processus démonstratifs. En même temps, cela nous permet d’observer comment le processus de construction du contrôle logique basé sur le “dragging” est beaucoup plus complexe que l’on croit.

Les phénomènes observables dans un milieu dynamique autant que ceux qui le sont dans la réalité sont modélisés à l’intérieur d’une théorie, et le processus de modélisation ne peut passer sous silence, il devra être pris en compte et discuté.

L'exemple est tiré des protocoles recueillis par Catia Mogetta dans le cadre de son travail de recherche pour sa Thèse de Doctorat.

Considérons le problème suivant :

“Deux circonférences sécantes C1 et C2 ont en commun une corde AB. Soit C un point variable sur la circonférence C1. On prolonge les segments CA et CB jusqu’à ce qu’ils coupent la circonférence C2 respectivement en E et en F.

Que pouvons-nous dire de la corde EF au changement de position -au déplacement- de C sur la circonférence C1?

Quel est le lieu géométrique du point moyen de EF quand C se déplace sur la circonférence?

Giulia est une élève du quatrième année d'une école supérieure scientifique. Le problème a été présenté dans l’environnement Cabri II . Elle a déjà résolu la première partie du problème en conjecturant et démontrant que la corde EF a une longueur constante.
La deuxième partie du problème demande d’identifier un lieu géométrique, Giulia produit rapidement la conjecture correcte, le lieu est un cercle, puis elle explicite la définition de cercle comme lieu des points qui sont à la même distance du centre. Elle demande si elle doit justifier l’énoncé, elle essaie et arrive à trouver une justification au fait évident que la corde EF a toujours la même distance du centre du cercle C2.

Giulia (18 ans IV Liceo scientifico)

1: G : Oui... si ce segment-ci doit toujours être... il est toujours égal... il a toujours la même distance du centre, parce qu’en changeant le segment... je veux dire que les segments égaux sont ceux à qui... je ne me rappelle pas exactement ce que dit le théorème, mais des segments égaux sont... ont la même distance du centre ... des segments égaux sur la même circonférence... ont la même distance du centre, et donc... si je démontre... non, pas si je démontre, j’ai déjà démontré que ce segment-là est toujours égal.
2: C : Oui, mais... si tu dis cela... c’est vrai que si tu as des cordes égales, la distance du centre reste constante... des cordes de la même longueur sont équidistantes du centre, mais... dit comme ça...
3: G : **je ne l’ai pas démontré parce que je n’ai pas démontré que cette roue**... ou quelque chose de ce genre...
[…]
4: G : Maintenant, je dois dire aussi pourquoi le lieu géométrique est une circonférence ? Je dois le démontrer ?
5: C : Tu ne l’as pas déjà dit ? Tu as dit qu’il reste toujours constant...
6: G : il reste constant...
7: C : comment tu définis la circonférence ?
8: G : Je la définis comme lieu... tu as raison... lieu des points équidistants du centre...
9: J’ai pensé que je devais démontrer aussi... non, c’est peut-être stupide... que je devais démontrer aussi qu’elle tournait autour du centre...
10: C : Ah, qu’elle tournait...

11: G : Mais ce n’était pas une chose...? si je dis... bon, qu’elle forme... mais la circonférence, que c’est une circonférence, je le vois bien quand je prends et que je tourne et que je fais glisser le point C sur la circonférence, mais si je prends un point au hasard, je pourrais aussi ne pas avoir une circonférence, comment je fais pour dire avec certitude que c’est une circonférence ?

12: C : Comment cela, un point au hasard ?

13: G : Je veux dire un point au hasard... je ne dois pas démontrer qu’il me donne une circonférence ? qu’il est le lieu géométrique ?

14: C : Non, parce que ce n’est pas un point au hasard... c’est le point médian de cette corde qui tourne au changement de position –déplacement- du point C sur la circonférence

15: G : Je ne dois pas démontrer qu’il tourne ?

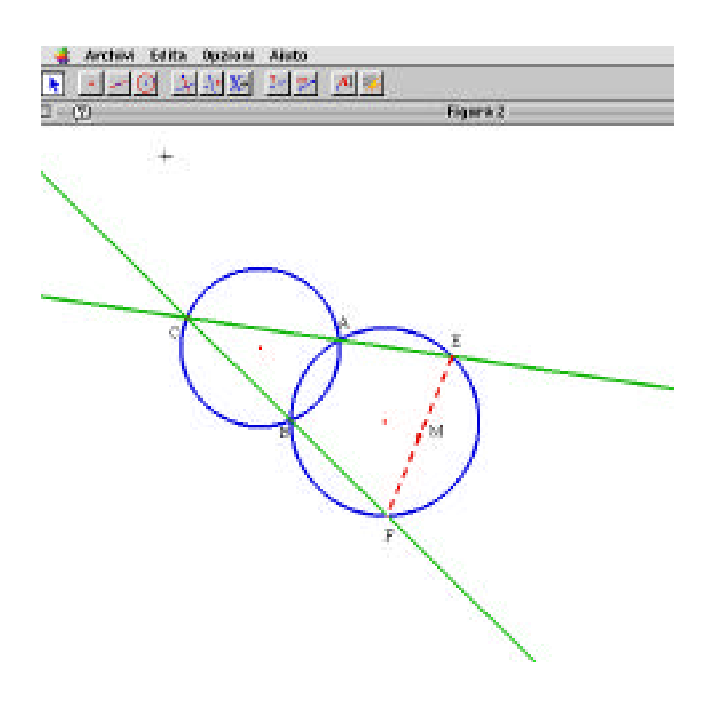


Fig . 7 Le dessin qui apparaît sur l’écran de l’ordinateur

16: C : Comment fais-tu à démontrer qu’il tourne?

17: G : Je ne sais pas... en fait, c’est ça le problème

18: C : Le fait est que quand tu as démontré qu’au déplacement de C le triangle qui a la corde comme un de ses côtés est un triangle toujours constant, tu as démontré que c’est une circonférence parce que c’est le lieu des points équidistants...

19: G : C’est tout ? **Ça suffit pour démontrer que c’est une circonférence** ?

Giulia cherche un argument et le fait en se référant à ses propres connaissances géométriques, elle cherche un théorème qui justifierait pour elle le fait que la corde est à une distance constante du centre de C2. Elle semble se rappeler vaguement un théorème à propos des cordes... mais alors qu'elle est occupée à reconstruire le théorème sous une forme qui puisse lui servir, elle est assaillie par un doute (3). Elle se rend compte que les propriétés dynamiques du lieu, comme elle le perçoit à partir de l'image sur l'écran, ne peuvent être exprimées par l'argumentation qu'elle est en train d'élaborer. La rotation de la corde est perçue comme quelque chose qu'il « faut démontrer ». Giulia n'est pas satisfaite, elle sent la nécessité d'exprimer par un « énoncé mathématique » la perception du mouvement, par un énoncé qu'il soit ensuite possible de démontrer.
L'interlocuteur fournit quelques suggestions et Giulia complète la démonstration du fait que le point du milieu est à une distance constante du centre de C2. Mais Giulia n'est pas satisfaite et revient à son doute initial. Ce qu'elle a démontré ne lui semble pas suffisant ; elle doit démontrer que c'est un cercle, mais il apparaît clairement qu'il existe une distance entre la définition de cercle que Giulia dont elle dispose (cercle comme lieu statique) et la conception de lieu qu'elle est en train d'utiliser, liée au milieu dynamique spécifique dans lequel elle travaille.
Il semble donc qu'il y ait conflit entre la théorie disponible, dans ce cas celle de la géométrie classique et en particulier la définition de cercle, de nature statique (Heath, 1956), et les conceptions en jeu issues d'un milieu dynamique. Giulia exprime ses propres doutes vis-à-vis de la démonstration qu'elle a produite : ce qu'elle a démontré ne suffit pas, pour résoudre le problème, il faut exprimer théoriquement l'aspect dynamique du problème. Elle pense qu'elle doit démontrer le fait que la corde tourne et que ses points forment un cercle par effet de rotation.
Cet exemple nous semble particulièrement intéressant parce qu'il incarne parfaitement tous les aspects que nous avons développés. D'un côté, la continuité entre les arguments produits à partir d'une conjecture et les arguments produits pour une démonstration semble être une nécessité pour Giulia ; de l'autre, une telle nécessité est remise en cause par le cadre théorique disponible pour ce type de problème : la géométrie d'Euclide. La nature intrinsèquement statique de la théorie géométrique ne permet pas à l'intuition de Giulia d'exprimer immédiatement son dynamisme.
Les propriétés intrinsèquement dynamiques qui émergent des phénomènes observables en milieu Cabri doivent trouver leur place dans un cadre théorique intrinsèquement statique. Ce qui signifie que la gestion de la fonction du déplacement, en relation avec la production de conjectures, peut se révéler bien plus complexe que prévu. Le rapport entre phénomènes observables et propriétés géométriques doit être établi sur la base d'un processus de modélisation qui détermine le passage du monde des figures de Cabri au monde théorique de la Géométrie. L'interprétation des invariantes par déplacement doit passer à travers une

interprétation utilisant les termes de la théorie disponible; une telle interprétation n’est ni simple ni immédiate.

Les difficultés mises en lumière par l’exemple de Giulia nous conduisent à considérer attentivement ce processus d’interprétation. La proposition de construction de la théorie, telle que nous l’avons présentée, représente une tentative de prendre ce processus explicitement en compte.

Le travail de recherche qui se poursuit encore concerne précisément l’analyse fine du processus de *médiation sémiotique* qui on a mis comme hypothèse. Les résultats de l’expérience développée ces dernières années nous ont semblé très encourageants, et nous entendons utiliser le modèle explicatif élaboré en essayant de décrire les processus fins impliqués dans le processus de *médiation sémiotique* dans le cas du passage de l’utilisation du “dragging” au contrôle théorique.

Bibliographie

Balacheff, N. : 1987, Processus de preuve et situations de validation, *Educational Studies in Mathematics*, vol. 18, n.2, pp. 147-76.

Balacheff, N. : 1999, Pour un questionnement ethnomathématique de l'enseignement de la preuve, La lettre de la preuve, Sett./ Oct. 1999,

http://www-cabri.imag.fr/Preuve/Newsletter/990910.html.

Balacheff N. (1998) Apprendre la preuve. In : J. Sallantin, Szczeciniarz J.-J. (eds.) *La preuve à la lumière de l'intelligence artificielle* . Paris: PUF

Bartolini Bussi M G..:1998, Verbal interaction in mathematics classroom: a Vygotskian analysis, Sierpinska, A. et al. (eds.) *Language and communication in mathematics classroom,* NCTM, 65-84

Bartolini Bussi M. G., Boni, M., Ferri, F. & Garuti, R.:1999, Early Approach To Theoretical Thinking: Gears in Primary School,, ***Educational Studies in Mathematics*****, 39 (1-3), 67-87.**

Baulac, Y , Bellemain, F. & Laborde, J.-M. : 1988, ***Cabri-Géomètre, un logiciel d’aide à l’enseignement de la géométrie*****, Logiciel et manuel d’utilisation, Version 1.O Macintosh de Apple. Paris : Nathan – logiciels.**

Boero, P., Dapueto, C., Ferrari, P., Ferrero, E., Garuti, R., Lemut, E., Parenti, L., Scali, E.:1995, Aspects of the Mathematics-Culture Relationship in Mathematics Teaching-Learning in Compulsory School, ***Proc. of PME-XIX*****, Recife**

Boero P., Garuti R. & Mariotti, M.A. : 1996, Some dynamic mental processes underlying producing and proving conjectures, in ***Proceedings of the 20th PME Conference*****, Valencia**

Cerulli M. & Mariotti, M.A.: 2000, A symbolic manipulator to introduce pupils to algebra theory. Proceedings of Worksjop W6 “Learning Algebra with the Computer a Transdisciplinary Workshop”. ITS’2000, Montreal.

Cerulli, M. (1999) ***Uso di manipolatori simbolici nell'introduzione all'algebra: realizzazione e sperimentazione di un prototipo*****. Manuscript non publié, Tesi di Laurea in Matematica presso "Università degli Studi di Pisa". Pisa.**

Duval, R.:1991, Structure du raisonnement deductivf et apprentisssage de la démostration, ***Educational Studies in Mathematics*****,22, 233-261.**

Duval, R. :1992-93, Argumenter, demontrer, expliquer: continuité ou rupture cognitive?, in ***Petit x*** **, n° 31, pp. 37-61.**

Garuti R. & Boero, P. 1997 Cognitive Unity of theorems and difficulty of proof,

Garuti R., Boero P, Lemut E. & Mariotti, M.A. :1996, Challenging the traditional school approach to theorems: a hypothesis about the cognitive unity of theorems, in ***Proceedings of the 20th PME Conference*****, Valencia.**

Hanna, G.: 1990, Some pedagogical aspects of proof, ***Interchange*****, 21, 6-13.**

Harel,G. & Sowder, L.: 1998, Students' Proof schemes, Dubinsky E. et al. ***Collegiate Mathematics Education*** **, Vol. III, A.M.S. 234-283.**

Heath, T.: 1956 The Thirtheen Books of Euclid's Elements, Dover, New York

Hilbert, D. : 1971, Foundation of Geometry, Open Court Classic (Original title Grundlagen der Geometrie, first published 1899)

Lakatos, 1976***; Proof and refutations*****, Cambridge university press**

Lolli, G.: 2000, 'Truth and Proofs, a short course in the epistemology of mathematics', in: Arzarello, F. & Ferrari, P.L. (eds): ***Proceedings of the School on Epistemology of Mathematics and Didactics*****, Levico Terme, 8-12 February 1999, (to appear).**

Maracci M. (1998); *Risoluzione di problemi di geometria piana: l'analisi dei processi in situazione sperimentale*,**Manuscript non publié, Tesi di Laurea in Matematica presso "Università degli Studi di Pisa". Pisa**

Mariotti, M. A.:1996, Costruzioni in geometria, su ***L'insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate*****, 19B, n.3, pp. 261 – 88**

Mariotti, M.A :1997, Justifying and proving: figural and conceptual aspects, in Hejny M. & Novotna J. (eds.) ***Proceedings of the European Research Conference on Mathematical Education*****, Podebrady, Czech Republic.**

Mariotti M.A., Bartolini Bussi, M., Boero P., Ferri F., & Garuti R. :1997, Approaching geometry theorems in contexts: from history and epistemology to cognition, ***Proceedings of the 21th PME Conference*****, Lathi, pp. I- 180-95.**

Mariotti, M.A. & Bartolini Bussi M.G. :1998, From drawing to construction: teachers mediation within the Cabri environment, in ***Proceedings of the 22nd PME Conference*****,Stellenbosh, pp.I- 180-95.**

Mariotti M. A. (en cours de pubblication) Influence of technologies advances on students' math learning, in English L., Bartolini Bussi M. G., Jones G., Lesh R., & Tirosh D. (eds.) ***Handbook of International Research in Mathematics Education*****, Lawrence Erbaum Associates.**

Mogetta, C. (en cours de pubblication), "Informal and formal aspects of the proving process within a computer-based learning environment", ***Proceedings of ICTMT4 Plymouth.***

Noss, R. & Hoyles, C. (1996) ***Windows on mathematical meanings,*** **Dordrech : Kluwer Acc. Press**

Thurston, W.P. :1994, On Proof and Progress in Mathematics, ***Bull. of the A.M.S.*****, 30 , 161-177.**

Vygotskij L. S.:1978, Mind in Society. The Development of Higher Psychological Processes, Harvard University Press.